Suites numériques, convergences, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

223

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

I] Convergence d'une suite numérique et séries

1] Limite d'une suite

Définition 1 : On dit que (u_n) admet $\ell \in \mathbb{K}$ pour limite si :
$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \setminus \forall n\geq N, |u_n-\ell|\leq\varepsilon$

Exemple 2 : La suite $(u_n := 1+\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1.

Théorème 3 : (d'unicité de la limite) Si (u_n) a $\ell\in\mathbb{K}$ pour limite
Alors : cette limite est unique

Définition 4 : On dit que (u_n) est convergente si elle admet une limite. On dit qu'elle est divergente sinon.

Proposition 5 : Toute suite convergente est bornée

Contrexemple 6 : La réciproque est fausse.
La suite $(u_n := (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, non-convergente.

Proposition 7 : Soit $(u_n),(v_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et (v_n) bornée
Alors : $u_n v_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Théorème 8 : (caractérisation séquentielle de la continuité)
Soit $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$
Alors : f est continue ssi $\forall (u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell) \Rightarrow (f(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} f(\ell))$

Théorème 9 : (des gendarmes) Soit $(u_n),(a_n),(b_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\exists N\in\mathbb{N}\setminus\forall n\geq N, a_n\leq u_n\leq b_n$ et $(a_n),(b_n)$ convergent vers $\ell\in\mathbb{R}$.
Alors : (u_n) est convergente de limite ℓ.

Théorème 10 : Soit $(u_n),(v_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.
Alors : elles convergent vers une même limite $\ell\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leq\ell\leq v_n$

Exemple 11 : $(u_n := 1-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n := 1+\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers 1.

2] Théorème de Bolzano-Weierstrass réel.

Théorème 12 : (des segments emboîtés) Soit $(a_n),(b_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n\in\mathbb{N}, a_n<b_n$ et $[a_{n+1};b_{n+1}]\subseteq[a_n;b_n]$ et telles que $(b_n-a_n)\xrightarrow[+\infty]{}0$.
Alors : $\exists \ell\in\mathbb{R}\setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n;b_n]=\{\ell\}$

Théorème 13 : (de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Application 14 : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Application 15 : (théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b)<0$.
Alors : $\exists x\in]a;b[\setminus f(x)=0$

3] Utilisation des termes d'une série

Théorème 16 : (règle d'équivalence) Soit $(u_n),(v_n)\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$
Alors : Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Si elles convergent, alors les restes sont équivalent. Si elles divergent, alors les sommes partielles sont équivalentes.

Théorème 17 : Soit $(u_n),(v_n)\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$
Alors : si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et les restes vérifient
$R_n^u \underset{+\infty}{=} o(R_n^v)$

Proposition 18 : (séries de Bertrand) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge ssi $(\alpha>1$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1))$

Théorème 19 : (règle de Cauchy) Soit $L=\lim_{+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$
Alors : (1) Si $L<1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument
(2) Si $L>1$, alors la série $\sum u_n$ diverge

Théorème 20 : (règle de D'Alembert) Soit $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ non-nulle à partir d'un certain rang, soit $L=\lim_{+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$
Alors : (1) Si $L<1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument
(2) Si $L>1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 21 : Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $(u_n := \frac{a^n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a $L=a$ et alors $\sum \frac{a^n}{n}$ converge si $a<1$ et diverge si $a\geq 1$.

Théorème 22 : (critère des séries alternées) Soit $(a_n)\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0.
Alors : La série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente de somme S et $\forall n\in\mathbb{N}, S_{2n+1}\leq S\leq S_{2n}$ et $|R_n|\leq a_{n+1}$

Exemple 23 : Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est convergente et $\forall n\in\mathbb{N}, |R_n|\leq\frac{1}{(n+1)^\alpha}$

I.2 [Rom] IV.2 [Rom] I.3 I.6 [El Am] II.1 II.2 [El Am] II.4

II] Notions plus faibles que la convergence

1] Suites de Cauchy

I.4 [El Am]

Définition 24 : On dit que (u_n) est de Cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon$

Proposition 25 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Exemple 26 : La suite $(H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et alors n'est pas convergente.

Proposition 27 : Toute suite de Cauchy est bornée.

Lemme 28 : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite de Cauchy telle que (u_n) admette une sous-suite extraite convergeant vers $\ell \in \mathbb{K}$.
Alors : (u_n) est convergente de limite ℓ

Théorème 29 : $\mathbb{K}$ est complet

2] Convergence en moyenne de Cesaro

I.7 exo 8 [El Am]

Définition 30 : La suite des moyennes de Cesaro de (u_n) est : $(v_n := \frac{u_1 + \dots + u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. On dit que (u_n) converge en moyenne de Cesaro si la suite (v_n) converge.

Théorème 31 : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite convergente.
Alors : (u_n) converge en moyenne de Cesaro.

Contrexemple 32 : La réciproque est fausse.
La suite $(u_n := (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge mais $(v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

Définition 33 : On appelle isobarycentre de $(z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n$ le complexe $g := \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$

[Isen]

Théorème 34 : Soit P polygône de sommets $(z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de polygônes telle que $P_0 = P$ et pour laquelle les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors : La suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P

3] Convergence ponctuelle de sommes partielles, théorème de Féjer et loi faible des grands nombres

Théorème 35 : (de Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}^1_{\text{morceaux}}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, 2π-périodique.
Alors : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = \lim_{+\infty} f * D_N$ avec $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$, $e_n(t) = e^{int}$

V.5 V.6 [El Am]

Théorème 36 : (de Féjer) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, 2π-périodique, soit $(S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(C_N = \frac{S_0 + \dots + S_N}{N+1})_{N \in \mathbb{N}}$
Alors : La suite (C_N) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

X.4 [Ouv 2]

Théorème 37 : (loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$, deux à deux indépendantes de même loi μ et admettant une moyenne.
Alors : la suite $(\overline{X_n} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilités vers la moyenne commune $\mathbb{E}[X_1]$.

III] Valeurs d'adhérence de suites numériques

1] Lien avec les suites convergentes

I.2 [El Am]

Définition 38 : On dit que $\ell \in \mathbb{K}$ est valeur d'adhérence de (u_n) si :
$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \setminus |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Exemple 39 : $(u_n := (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour valeurs d'adhérence 1 et -1.

Proposition 40 : Toute suite convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence

Contrexemple 41 : La réciproque est fausse.
$(u_n := [1 - (-1)^n] \times n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a que 0 comme valeur d'adhérence et pourtant (u_n) diverge.

Théorème 42 : (u_n) converge ssi (u_n) est bornée et n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

DEV n°1 [Isen]

Lemme 43 : Soit $(X; d)$ espace métrique compact et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $d(x_{n+1}; x_n) \xrightarrow[+\infty]{} 0$
Alors : l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est connexe

Proposition 44 : (lemme de la grenouille) Soit $f \in \mathcal{C}([0;1]; [0;1])$, $x_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ telle que $x_{n+1} - x_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
Alors : la suite (x_n) converge.

DEV n°2 [Ber]

2] Valeurs d'adhérence de suites réelles, limsup/liminf

Pour cette sous-partie, on suppose $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée.

IV.7 [Rom]

Proposition 45 : Les suites $\left(\sup_{k\geq n}\{u_k\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\inf_{k\geq n}\{u_k\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Définition 46 : On appelle limite supérieure la quantité : $\limsup(u_n) := \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n}\{u_k\}\right)$ et limite inférieure la quantité : $\liminf(u_n) := \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n}\{u_k\}\right)$.

Lemme 47 : $\limsup(u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n) et $\liminf(u_n)$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n).

Théorème 48 : (u_n) converge ssi $\liminf(u_n) = \limsup(u_n)$

IV] Quelques techniques pour étudier les suites numériques

1] Suites récurrentes et exemples linéaires

IV.1 [Gou An]

Définition 49 : On dit que (u_n) est récurrente d'ordre h si on peut écrire $\forall n \geq h$, $u_n = f(u_{n-1}; \dots; u_{n-h})$ avec $f : \mathbb{K}^h \to \mathbb{K}$ application.

Proposition 50 : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subseteq I$ et $u_0 \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Alors : (1) Si f est croissante, alors (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$

(2) Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie opposés.

Exemple 51 : Si $f(x) = qx + a$, alors on dit que (u_n) est arithmético-géométrique et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n(u_0 - r) + r$, $r = \frac{a}{1-q}$

Exemple 52 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y;z) \mapsto ay + bz$, alors : si $(E) : x^2 - ax - b = 0$

(1) possède deux racines réelles $x_1 \neq x_2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n$

(2) possède une racine double x, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) x^n$

(3) possède deux racines complexes $\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n [\gamma \cos(n\theta) + \delta \sin(n\theta)]$

2] Approximation de points particuliers

XII.1 [Rom]

Théorème 53 : (point fixe de Picard) Soit $F \subseteq \mathbb{K}$ fermé et $f : F \to F$ application λ-contractante avec $\lambda \in [0;1[$

Alors : f admet un unique point fixe $x \in F$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $u_n \xrightarrow[+\infty]{} x$ avec $d(x; u_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(u_1; u_0)$

XII.4 [Rom]

Théorème 54 : Soit $f \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$ et $x \in \mathring{I}$ tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$

Alors : $\exists \eta > 0 \setminus \forall x_0 \in [x - \eta; x + \eta]$, la suite $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ converge vers x.

Théorème 55 : (méthode de Newton) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a;b]; \mathbb{R})$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et $\forall x \in [a;b]$, $f'(x) f''(x) < 0$.

Alors : $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]a;b[$ et pour tout $x_0 \in [a;b[$ tel que $f(x_0) f''(x_0) > 0$, la suite telle que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est monotone, converge vers x et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - x| \leq (b-a) \times \left(\frac{b-a}{2} \times \frac{M_2}{m_1}\right)^{2^n - 1} \quad \text{avec} \quad m_1 = \inf\{|f'|\}, \; M_2 = \sup\{|f''|\}$$

Application 56 : On peut approcher $\sqrt{y}$ avec la méthode de Newton

3] Comportement asymptotique de suites numériques

IV.2 [Gou An]

Proposition 57 : (développement de la série harmonique) Soit $\left(H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Alors : $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Proposition 58 : Soient $(u_n), (u_n'), (v_n), (v_n') \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Alors : (1) Si $u_n \sim v_n$ et $u_n' \sim v_n'$, alors $u_n u_n' \sim v_n v_n'$

(2) Si $u_n \sim v_n$ et $u_n' \sim v_n'$, alors $\frac{u_n}{u_n'} \sim \frac{v_n}{v_n'}$ (quand bien défini)

(3) Si $u_n \sim v_n$, alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_n^k \sim v_n^k$

Application 59 : Soit $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ premiers entre eux et soit $(u_n := \#\{(x_1; \dots; x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\})_{n\in\mathbb{N}}$

Alors : $u_n \sim \frac{1}{a_1 \times \dots \times a_k} \times \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

[Gan Am]

Proposition 60 : Soit $b > 0$, $f : [0;b] \to \mathbb{R}$ telle que f est continue et croissante, $f(0) = 0$, $(\forall x \in]0;b]$, $f(x) < x)$ et telle que : $\exists \lambda > 0 \setminus \exists r > 1 \setminus f(x) \underset{0}{=} x - \lambda x^r + o(x^r)$. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 \in]0;b[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors : (u_n) est à valeurs dans $]0;b[$ et $u_n \sim \frac{[\lambda(r-1)]^{\frac{1}{1-r}}}{n^{\frac{1}{r-1}}}$

Exemple 61 : En prenant $u_0 > 0$ et $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Exemple 62 : En prenant $u_0 \geq 0$ et $f : x \mapsto x + e^{-x^2}$, on a :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{\ln(n)}$$

Références :

[ElAm] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions – El Amrani

[Rom] Éléments d'analyse réelle – Rombaldi

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques – Isenmann

[Tchou] Je découvre les maths avec Tchoupi – Tchoupi

[Ouv2] Probabilités – Ouvrard

[GouAn] Les maths en tête Analyse – Gourdon

[FGNAn2] Exercices de mathématiques oraux X-ENS Analyse Tome 2 – Francinou

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques – Bernis